Kamiran Feynman dan Sistem Terkamir Lengkap: Suatu Kerangka Kerja Baru dalam Matematik Fizik

Zainal Abdul Aziz
Jabatan Matematik, Fakulti Sains
Universiti Teknologi Malaysia
81310 UTM Skudai
Johor Darul Takzim

E-mail : zaa@mel.fs.utm.my

Abstrak

Kertas kerja ini menghuraikan secara ringkas suatu kerangka kerja baru dalam matematik fizik. Ini berakar umbi daripada hubungan hipotetikal di antara konsep heuristik kamiran Feynman dalam fizik dengan keputusan-keputusan matematik yang rapi dan terbit daripada teori sistem-sistem (hierarki) terkamir lengkap (berkepentingan fizikal). Idea ini berlandaskan konjektur Witten (1991) dan model Kontsevich (1992), yang secara teratur membolehkan diformulasi hubungan istimewa itu. Secara asas kaitan ini merujuk kepada suatu fungsi penjana kepada nombor-nombor persilangan pada ruang moduli bagi lengkung-lengkung stabil (atau lengkung-lengkung spin-r) dengan fungsi tau bagi hierarki Korteweg-de Vries (atau Gelfand-Dickey).

Katakunci: Kamiran Feynman, Sistem Terkamir Lengkap, Fungsi Tau.

1 Pengenalan

Fizik ialah suatu sains bersifat peribumi yang diasaskan menerusi eksperimen dan pemerhatian mengenai kefahaman kita terhadap persekitaran semulajadi. Matematik pula lazim dipersepsi sebagai suatu permainan minda manusia (lihat Faddeev 1990). Namun kedua-dua cabang budaya kemanusian ini adalah terjalin secara amat intim. Kami senaraikan jalinan ini dengan memaparkan beberapa contoh relevan. Persoalan matematik berkaitan postulat kelima mengenai garis-garis selari dalam geometri Euklidan merangsang rekaan geometri tidak Euklidan pada awal abad ke sembilan belas oleh Lobachevski, Bolya dan Gauss dan yang khususnya lagi pembinaan geometri oleh Riemann menghasilkan geometri Riemannan. Umum memaklumi bahawa pada awal abad kedua puluh, geometri Riemannan menjadi asas bagi teori graviti Einstein. Hampir beberapa ribu tahun yang lepas menyaksikan ahli matematik menjadi resah terhadap penyelesaian persamaan aljabar dalam bentuk kuadratur. Masalah ini akhirnya diselesaikan oleh Galois pada awal kurun kedua puluh dengan mencipta teori kumpulan. Dewasa ini, teori kumpulan membentuk asas penting kepada perihalan simetri dalam fizik. Contoh-contoh ini memperlihatkan bagaimana pembangunan dalaman persoalan-persoalan matematik yang asalnya dilihat sebagai permainan minda, kini mempunyai kegunaan mendalam dalam fizik.

Penyelidikan dan pembangunan matematik dan fizik adalah suatu proses bersifat laluan dua hala. Sebagai contoh, cerapan fizikal pertama mengenai 'gelombang solitari' yang dilakukan oleh J. Scott-Russell dan tercatat dalam kertas beliau '*Report on Waves*' (1844) dimodelkan oleh Korteweg dan de Vries (1895) sebagai fenomenon tajaan persamaan Korteweg-de Vries (KdV). Selanjutnya fenomenon ini dikaji oleh Fermi et al. (FPU) (1955) di makmal Los Alamos secara simulasi komputer terhadap satu kekisi bermatra satu rangkaian 64 biji zarah berjisim sama dengan interaksi lemah tidak linear di antara jiran terdekat. Laporan FPU itu disahkan oleh Kruskal dan Zabusky (1965) di makmal Bell Telephones, mempamerkan gelombang-gelombang solitari – bentuk kuasa dua hiperbolik sekan, yang 'saling menyusup' di antara satu dengan lain (dalam keadaan dua, tiga atau lebih) tanpa sebarang kesan kecuali anjakan fasa. Entiti fizikal itu mereka gelar 'soliton'. Mulai dari titik-tolak ini persamaan KdV menerima pengiktirafan umum sama ada dalam fizik mahupun matematik, khususnya selepas kerja-kerja terkemuka Gardner et al. (GGKM) (1967) dengan penemuan Teknik Penyebaran Songsang (TPS) dan Lax (1968) dengan kerapian matematiknya. Industri ini berkembang pesat sehingga kini dengan arah dasar-dasarnya melebar. Lebih khususnya, sebagai suatu prototaip sistem tak linear terkamir lengkap, persamaan KdV mempunyai dampak besar kepada bidang matematik termasuklah teori persamaan terbitan, geometri algebra, teori kumpulan Lie dan kumpulan gelung, geometri kebezaan dan lain-lain (lihat Palais 1997). Dewasa ini, keputusan-keputusan ini membantu secara konkrit pelbagai masalah dalam bidang 'matematik fizik moden' seperti teori medan kuantum, teori tetali, teori medan konformal dan graviti kuantum (lihat Bullough & Caudrey 1995). Konsep kamiran Feynman juga menjejaki sejarah yang sama. Feynman (1948) memperkenalkan kamiran lintasan Feynman sekadar memperlihatkan wujudnya formulasi alternative mekanik kuantum tidak berkerelatifan selain daripada formulasi Schroedinger (fungsi gelombang) dan formulasi Heisenberg (matriks atau pengoperasi). Namun konsep kamiran Feynman itu sehingga kini telah mempengaruhi dan merangsang penyelidikan dan pembangunan mendalam dalam pelbagai bidang matematik dan fizik (lihat Johnson & Lapidus 2000). Kami nyatakan komen Profesor Gian-Carlo Rota (1997) tentang hal ini:

The Feynman integral is the mathematicians' 'pons asinorum'. *Attempts to put it on a sound footing have generated more mathematics than any subject in physics since the hydrogen atom. To no avail. The mystery remains, and it will stay with us for a long time.*

Persoalan utama yang memikat ramai penyelidik sehingga kini (rujuk Shaharir 1986, Johnson & Lapidus 2000, Zainal 2001, Jefferies 2004) ialah, apakah ciri-ciri penting lagi bererti secara matematik dan fizik yang boleh disekutukan dengan penyelesaian (sebagai contoh kepada persamaan Schroedinger) yang berbentuk kamiran Feynman? Dewasa ini kewujudan kamiran Feynman secara intisarinya dipersoalkan, khususnya dalam konteks kerapian matematiknya dibandingkan dengan keberkesanan luar biasanya dalam fizik (lihat Roepstorff 1994, Kolotkosov 2001). Walaubagaimanapun, pengertian intuitif (berlandaskan prinsip superposisi kuantum dan preskripsi keratan masa) didapati sangat berjaya dalam pengiraan eksplisit kamiran lintasan dalam pelbagai bidang spesifik fizik dan lebih dominannya dalam teori fizik zarah: elektrodinamik kuantum, teori medan kuantum dan teori tetali (lihat Salam 1988, Kleinert 1990, Polyakov 1987, Feher et al. 1992, Polchinski 1998). Kejayaan istimewa itu yang diberikan kepada kamiran Feynman dalam berbagai bidang di atas telah menarik ikhtiar bersungguh-sungguh ahli matematik untuk menjawab permasalahan kewujudan kamiran Feynman dan mengesyorkan pelbagai teori kamiran untuk memadankan dengan kamiran Feynman yang elusif itu. Berbagai kemelut genting yang meliputi ungkapan piawai kamiran Feynman itu telah disenaraikan dalam Zainal (2004a).

Kira-kira beberapa dekad dalam kurun yang lalu, dua tema mengagumkan telah mendominasi pembangunan teori sistem dinamik. Di satu pihak, disaksi pembangunan besar dan pesat dalam teori "kelam kabut". Persoalan mendesak di sini adalah bagaimana suatu sistem berketentuan ini dapat memperihal pelbagai gelagat yang tidak teramalkan itu. Di pihak yang lain pula, terdapat kelas sistem yang sama celaru dengan sebab-musabab yang berbeza. Bagi "sistem terkamir" ini, cabarannya ialah untuk menerangkan sifat-sifat luar biasa berkaitan kebolehramalan, susunan dan tabii hampir berkala sistem itu yang dipamerkan oleh penyelesaian sistem berbentuk 'soliton'. Soliton mempamerkan ciri-ciri kezarahan fizikal.

Sistem terkamir itu diwakili oleh sistem terkamir persamaan-persamaan terbitan separa tidak linear, yang juga wujud bersatu dalam komuniti besar dinamai hierarki. Kesemua persamaan di dalam hierarki itu adalah berhubungan di antara satu dengan lain. Hierarki yang pertama diperoleh adalah hierarki-hierarki KdV teritlak, satu bagi setiap nombor tabii n (lihat Dickey 1991). Setelah itu ditemui pula hierarki Kadomtsev-Petviashvili (KP) yang besar dan menggabungkan kesemua KdV. Hierarki itu terdiri daripada persamaan-persamaan skalar. Dengan segeranya persamaan ini diitlakkan menjadi persamaan matriks. Semuanya membentuk KdV dan KP bersifat "berbilang-komponen". Kesemua hierarki ini dijanakan oleh pengoperasi terbitan linear (KdV) atau terbitan pseudo (KP) yang berperingkat sebarangan. Terdapat juga persamaan AKNS (bagi Ablowitz, Kaup, Newell dan Segur) dengan pengoperasi berperingkat satu matriks 2×2, dan Dubrovin pula mengitlakkan ini kepada matriks $n\times n$, yang hasilnya dinamai hierarki AKNS-

D. Persamaan-persamaan ini dijana oleh pengoperasi terbitan matriks peringkat pertama yang bersandar linear terhadap suatu parameter spektral. Pengitlakan seterusnya berlaku apabila pengoperasi linear dibiarkan bersandar terhadap suatu parameter berupa polinomial sebarang darjah. Akhirnya, kasus paling umum melibatkan sebarang sandaran rasional terhadap satu parameter. Persamaan-persamaan ini digelar persamaan umum Zakharov-Shabat (ZS). Persamaan ini juga membentuk suatu hierarki (lihat Dickey 1994). Hierarki dengan polinomial bersandar terhadap suatu parameter adalah suatu kasus khas ZS umum apabila di infiniti, terdapat satu kutub tunggal. Persamaan dinamai s-p ZS. Kesemua KdV dan AKNS adalah tidak lain hanyalah penurunan hierarki ZS teritlak.

Suatu pencapaian yang besar dalam teori sistem terkamir lengkap ialah dengan kejayaan memperkenalkan fungsi (tau) τ bagi hierarki persamaan-persamaan KP oleh "sekolah Kyoto" yang terdiri daripada Date, Jimbo, Kashiwara, Miwa dan Sato (Date et al. 1983). Persamaan KP adalah satu pengitlakan persamaan KdV kepada dua matra. Ia mempunyai hampir kesemua sifat-sifat terkenal persamaan KdV; khususnya wujud satu hierarki persamaan-persamaan KP yang terhubung oleh satu set tidak terhingga banyaknya aliran Hamiltonan yang kalis tukar tertib. Fungsi-τ ialah fungsi terhadap tidak terhingga banyak pembolehubah $(x_1, x_2, \ldots)$ yang memperihal suatu penyelesaian bagi hierarki KP yang lengkap; maksudnya suatu penyelesaian bagi setiap persamaan dalam hierarki boleh diperoleh dengan mengambil suatu logaritma terbitan kepada fungsi-τ itu. Hierarki KdV diperoleh daripada hierarki KP dengan membiarkan seluruh x_j yang bernombor genap bersamaan nilai-nilai malar.

Kertas kerja ini ringkasnya membincangkan suatu kerangka kerja, berakar umbi daripada hubungan hipotetikal di antara konsep heuristic kamiran Feynman dan keputusan-keputusan berkerapian yang terbit daripada teori system terkamir, khususnya yang berkaitan dengan fungsi-τ. Kertas kerja ini disusun seperti berikut: seksyen 2 memperihal mukadimah ringkas, seksyen 3 membincangkan fungsi penjana bagi nombor-nombor persilangan pada ruang moduli bagi lengkung-lengkung stabil dan fungsi-τ hierarki KdV. Seksyen 4 menghubung fungsi penjana bagi nombor-nombor persilangan pada ruang moduli bagi lengkung-lengkung spin-*r* dan fungsi-τ hierarki Gelfand-Dickey; dan akhirnya seksyen 5 menyimpulkan bicara kami.

2 Mukadimah

Wujud dua teori fundamental dalam fizik abad kedua puluh yang lalu – teori kerelatifan am dan teori medan kuantum. Kedua-dua teori istimewa ini memperihal dunia yang sama pada skala berbeza. Teori kerelatifan am memperihal daya-daya graviti pada skala astronomikal, manakala teori medan kuantum memperihal interaksi zarah-zarah asasi, daya elektromagnetik, daya kuat dan lemah daripada skala atom (10^{-11}m) kepada skala Planck (10^{-35}m). Terdapat ketidak konsistenan di antara kedua-dua teori tersebut. Pengkuantuman formal kerelatifan am menghasilkan rumus-rumus tidak terhingga. Ketidak konsistenan di antara kedua-dua teori fundamental fizik ini adalah masalah terpenting dan ramai penyelidik, termasuklah Einstein dahulunya, telah dan sedang cuba menformulasikan satu teori penyatuan umum (GUT). Einstein mencipta teori kerelatifan am bagi menghuraikan ketidak konsistenan di antara kerelatifan khas dan graviti Newtonan. Teori medan kuantum dicipta bagi menyesuaikan teori elektromagnetik Maxwell dan kerelatifan khas beserta mekanik kuantum tidak berkerelatifan. Secara intisari, pendekatan kedua-dua teori berbeza. Di dalam penemuan kerelatifan am oleh Einstein, kerangka kerja berlogik sudahpun ditemui oleh penyelidik seperti Lorentz dan Poincare, manakala geometri Riemannan adalah kerangka kerja matematik yang bertepatan. Di dalam pembangunan teori medan kuantum, tidak kedapatan sama ada asas konseptual *a priori* mahu pun model matematik persis yang sesuai ; suluhan hanya diperoleh menerusi bukti-bukti eksperimen sahaja yang berperanan penting. Kerja-kerja berpengaruh oleh Witten (1987, 1991, 1993) melalui teori tetali, Jones (1991) terhadap teori simpulan dan Drinfeld (1987) menerusi kumpulan-kumpulan kuantum sesungguhnya menukar senario ini.

Kedua-dua mekanik klasik dan kuantum mempunyai dua konsep asas : *keadaan dan pencerap*. Pengukuran adalah suatu operasi ke atas sistem fizikal. Di dalam mekanik klasik, keadaan adalah titik pada suatu manifold (simplektik) *P* (ruang fasa) dan pencerap adalah fungsi atas *P*. Di dalam mekanik kuantum, keadaan mungkin bagi suatu sistem bersepadan dengan vektor unit dalam satu ruang Hilbert H dan kuantiti pencerap bersepadan pula dengan pengoperasi (swadampingan, tidak kalis tukar tertib) atas H. Menggabungkan kerelatifan khas dengan kedua-dua teori ini menghalakan mekanik klasik kepada kerelatifan am dan mekanik kuantum pula kepada teori medan kuantum. Laluan daripada mekanik klasik kepada mekanik kuantum digelar *pengkuantuman*. Hubungan di antara kedua-dua teori ini dikaji oleh Drinfeld dan Witten menerusi perspektif berbeza. Menurut Drinfeld, hubungan di antara mekanik klasik dan mekanik kuantum boleh difahami dalam sebutan pencerap. Di dalam kedua-dua kasus, pencerap membentuk suatu algebra kalis sekutuan yang kalis tukar tertib dalam pengertian klasik dan tidak kalis tukar tertib dalam perspektif kuantum. Oleh itu pengkuantuman seperti proses penukaran algebra kalis tukar tertib kepada algebra tidak kalis tukar tertib. Keadaan diperihal oleh Drinfeld dalam sebutan aljabar Hopf. Pendekatan beraljabar ini membawa Drinfeld kepada konsep kumpulan kuantum yang seterusnya mengaitkan dengan sistem terkamir lengkap dalam mekanik berstatistik, persamaan Yang-Baxter dan canggaan bagi aljabar Lie. Pendekatan Witten adalah bertopologi. Pengkuantuman diperihal dalam sebutan keadaan menggunakan kaedah kamiran lintasan Feynman. Pencerap adalah yang tak varian bertopologi. Pendekatan ini membawa Witten kepada teori tetali, teori medan kuantum bertopologi, teori medan konformal dan fungsi tindakan Chern-Simons. Kerja-kerja Jones (1991) berhubungan dengan kerja Drinfeld melalui polinomial Jones dan perwakilan bersekutuan bagi kumpulan-kumpulan renda (*braid groups*) dan kaitan kedua-duanya dengan sistem terkamir lengkap dalam mekanik berstatistik adalah menerusi suatu kaitan berkombinatorik di antara persamaan Yang-Baxter dengan polinomial Jones bagi simpulan. Hubungan kerja Jones dan Witten diperoleh melalui suatu tafsiran terhadap polinomial Jones dalam sebutan teori medan kuantum bertopologi. Tambahan pula, Lagrangean Chern-Simons dalam kamiran lintasan Feynman boleh digunakan untuk menghasilkan polinomial Jones, atau sebaliknya boleh digunakan hubungan ini untuk menulis semula kamiran-kamiran fungsian formal sebagai kuantiti bermatematik yang eksplisit. Begitulah kaitan penting ketiga-tiga kerja berpengaruh ini yang kami lihat secara eksplisit dapat menghubungkan teori kamiran Feynman dengan teori sistem terkamir lengkap.

Ringkasnya, konjektur Wittenlah (1991) yang mula-mula meramal perkaitan menarik di antara kedua-dua entiti yang kelihatan tiada sangkut paut itu: kamiran Feynman dan sistem terkamir lengkap atau secara bertekniknya suatu fungsi penjana bagi nombor-nombor persilangan pada ruang moduli bagi lengkung-lengkung stabil dan suatu fungsi-τ bagi hierarki KdV. Asas fizikal bagi konjektur ini terbit daripada pencaman dua pendekatan terhadap graviti kuantum dua matra. Secara intipatinya, korelator bagi graviti kuantum dua matra adalah kamiran lintasan Feynman terhadap 'ruang metrik' pada permukaan nyata bertopologi dua matra. Salah satu cara menilaikan kamiran lintasan ini melibatkan suatu teknik teori medan bertopologi yang akhirnya diturunkan kepada pengamiran terhadap ruang lengkung moduli. Teknik satu lagi mempertimbangkan suatu penghampiran kepada ruang metrik dengan metrik mendatar cebis demi cebis dan kemudiannya mengambil had selanjar yang sesuai. Di dalam pendekatan pertama, tenaga bebas menjadi fungsi tertakrif secara geometri

$$\tau^{pt}(t_0,t_1,\dots)=eksp\left[\sum_{g=0}^{\infty}S^{g-1}\,F_g^{pt}(t_0,t_1,\dots)\right], \tag{2.1}$$

dengan $F_g^{pt}(t)$ ialah fungsi penjana (berbentuk kamiran) bagi nombor-nombor persilangan pada ruang moduli bagi lengkung-lengkung stabil genus g dengan n titik-titik bertanda, $\overline{M}_{g,n}$,(ruang moduli Deligne-Mumford yang terpadatkan, $M_{g,n}$) atau potensi turunan (descendent) Gromov-Witten bergenus g bagi titik pada satu manifold simplektik padat $X\equiv pt$:

$$F_g(t_0,t_1,\dots):=\sum_{\mathrm{n}}\frac{1}{n!}\int_{\overline{M}_{g,n}}\prod_{i=1}^{n}\left(\sum_k t_k\,\psi_i^k\right), \tag{2.2}$$

$\psi_i^k\in H^2\left(\overline{M}_{g,n},C\right)$ adalah pembolehubah formal (digunakan aturan penghasiltambahan ke atas k) daripada kelas kohomologi Miller-Witten, dan nombor persilangan diberikan oleh

$$\left\langle \tau_{\upsilon_1} \dots \tau_{\upsilon_n} \right\rangle_{g,n} = \int_{\overline{M}_{g,n}} \psi_1^{\upsilon_1} \dots \psi_n^{\upsilon_n} \qquad (2.3)$$

Di dalam pendekatan kedua, fungsi penjana dalam had penskalaan ganda dua menghasilkan suatu fungsi-τ bagi hierarki KdV. Di sinilah pernyataan hipotesis Witten bahawa τ^{pt} adalah fungsi-τ (penyelesaian yang tak varian Virasoro) bagi hierarki KdV oleh sebab semestinya wujud hanya satu graviti kuantum. Tambahan pula, daripada geometri ruang moduli, boleh dideduksikan τ^{pt} memenuhi persamaan tetali

$$\frac{\partial F_0(t)}{\partial t_1^1} = \frac{1}{2}(t_0, t_0) + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\upsilon} t_{n+1}^{\upsilon} \frac{\partial F_0(t)}{\partial t_n^{\upsilon}} \qquad (2.4)$$

Adalah menjadi fakta asas dalam teori hierarki KdV (atau umumnya Kamdotsev-Patviashvili (KP)) yang secara uniknya persamaan tetali itu menentukan salah satu fungsi-τ bagi hierarki KdV daripada kesemua fungsi-τ yang diparameterkan oleh grassmannan Sato (Date et al 1983). Witten (1993) memformulasikan suatu pengitlakan konjektur di atas : secara analogi fungsi penjana τ^{r-spin} bagi nombor-nombor persilangan pada ruang moduli bagi lengkung-lengkung spin-*r* seharusnya dicamkan sebagai fungsi-τ hierarki Gelfand-Dikii (*r*-KdV atau KdV teritlak). Apabila *r* =2, konjektur ini terturun kepada konjektur asal, iaitu 2-KdV ialah persamaan KdV. Kasus khusus ini telahpun dibuktikan oleh Kontsevich (1992) dan terkininya suatu bukti baru melaui teori Gromov-Witten dan nombor Hurwitz dikemukakan oleh Okounkov-Pandharipande (2003). Mirzakhani (2007) pula memberikan bukti konjektur Witten dengan cara yang berbeza dengan menghubungkan nombor-nombor persilangan itu dengan isipadu ruang moduli bagi permukaan hiperbolik. Walau bagaimanapun, konjektur teritlak Witten masih menjadi masalah terbuka sehingga kini.

Kami berpendapat bahawa kemajuan seterusnya boleh dicapai melalui penggunaan ide-ide dan keputusan daripada teori model matriks graviti kuantum simpleks dan teori medan bertopologi sehinggalah geometri algebra dan topologi simplektik, iaitu beberapa bidang khusus dan bersangkutan dalam analisis sejagat. Hal ini sekaligus menimbulkan pelbagai masalah-masalah baru dalam teori sistem-sistem terkamir, khususnya masalah pengelasan sistem-sistem terkamir itu (Dubrovin 1996, Eguchi dan Xiong 1998).

3 Fungsi penjana nombor-nombor persilangan pada ruang moduli bagi lengkung-lengkung stabil dan fungsi-tau bagi hierarki

Ruang-ruang moduli bagi lengkung stabil mempunyai suatu keselularan-orbi sempurna dengan sel-sel dindekskan oleh kelas-kelas isomorfisma graf reben tertutup dengan lubang-lubang bernombor (Kontsevich, 1992). Oleh itu sebarang kamiran pada suatu ruang moduli bagi lengkung-lengkung stabil boleh ditulis sebagai satu hasiltambah ke atas kelas-kelas isomorfisma bagi graf reben bernombor. Secara khususnya diperoleh identiti utama Kontsevich yang istimewa itu:

$$\sum_{\upsilon_1,\dots,\upsilon_n} \left\langle \tau_{\upsilon_1} \dots \tau_{\upsilon_n} \right\rangle_{g,n} \prod_{i=1}^{n} \frac{(2\upsilon_i - 1)!!}{\lambda_i^{2\upsilon_i+1}} = \sum_{(\Gamma,h)} \frac{1}{|Aut(\Gamma,h)|} \left(\frac{1}{2}\right)^{|Vertices(\Gamma)|} \prod_{l \in Edges(\Gamma)} \frac{2}{\lambda_{h(l^+)} + \lambda_{h(l^-)}}$$

(3.1)

dengan λ_r pembolehubah nyata positif, (Γ, h) dengan julat ke atas set kelas isomorfisma graf-graf reben bernombor, tertutup, terkait dengan genus *g* dan *n* lubang; dan bagi sebarang tepi *l* bagi Γ, l^+, l^- melambangi lubang *l* yang dipunyai.

Biar $C\left[u, \frac{\partial u}{\partial t_0}, \dots\right]$ sebagai aljabar terbitan yang dijanakan oleh pembolehubah *u*. Polinomial Gelfand-Dickey adalah polinomial terbitan $R_i(u)$ yang ditakrifkan oleh hubungan rekursi berikut

$$\frac{\partial R_{n+1}(u)}{\partial t_0} = \frac{1}{2n+1}\left(\frac{\partial u}{\partial t_0} + 2u\frac{\partial}{\partial t_0} + \frac{1}{4}\frac{\partial^3}{\partial t_0^3}\right)R_n(u)\,, \tag{3.2}$$

dengan $R_0(u) = 1,\ R_n(0) = 0$ bagi $n > 0$.

Hierarki KdV diberikan oleh hierarki persamaan terbitan bagi suatu unsur U bagi $C[[t_*]]$ berikut:

$$\frac{\partial U}{\partial t_i} = \frac{\partial}{\partial t_0} R_{i+1}(U) \tag{3.3a}$$

Persamaan pertama hierarki KdV ialah

$$\frac{\partial U}{\partial t_1} = U\frac{\partial U}{\partial t_0} + \frac{1}{12}\frac{\partial^3 U}{\partial t_0^3} \tag{3.3b}$$

Jika disetkan $\varphi(x,t) = U\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x, 3\sqrt{2}\,t, 0, 0, \ldots\right)$, maka persamaan (3.3b) menjadi

$$\varphi_t = 6\varphi\varphi_x + \varphi_{xxx} \quad , \tag{3.3c}$$

iaitu persamaan KdV yang terkenal itu.

Berikut dinyatakan teorem-teorem penting dan seterusnya digariskan pembuktian berkaitan.

Teorem 3.1 (Kontsevich-Witten).

Siri bagi penjanaan nombor-nombor persilangan pada ruang moduli bagi lengkung (atau “fungsian tenaga bebas”) ialah siri formal berikut:

$$F(t_*) := \sum_{g,n}\left(\frac{1}{n!}\sum_{\upsilon_1,\ldots,\upsilon_n}\left\langle \tau_{\upsilon_1}\ldots\tau_{\upsilon_n}\right\rangle_{g,n} t_{\upsilon_1}\ldots t_{\upsilon_n}\right) \tag{3.4}$$

Oleh itu

a) siri $F(t_*)$ memenuhi persamaan tetali (2.4);

b) siri $U = \dfrac{\partial^2 F(t_*)}{\partial t_0^2}$ memenuhi hierarki KdV

Teorem 3.2

Fungsi pembahagian, merupakan fungsi-τ melalui (2.1), membentuk satu siri formal

$$Z(t_*) := \exp F(t_*) \tag{3.5}$$

dan adalah satu vector sifar bagi pengoperasi Virasoro $L_n\ ,\ n \geq -1$.

Rangka ringkas pembuktian

Jelasnya daripada teorem-teorem 3.1 & 3.2, hubungan aljabar di antara nombor-nombor persilangan $\left\langle \tau_{\upsilon_1}\ldots\tau_{\upsilon_n}\right\rangle$ boleh diterjemahkan kepada persamaan-persamaan terbitan, yang memenuhi siri formal $F(t_*)$ dan $Z(t_*)$. Sebenarnya Witten (1991) telah menkonjektur dan Kontsevich (1992) membuktikan bahawa $\dfrac{\partial^2 F(t_*)}{\partial t_0^2}$ memenuhi hierarki KdV. Tambahan lagi, $F(t_*)$ memenuhi persamaan tetali (2.4). Witten (1992) juga menunjukkan bahawa teorem 3.1 boleh ditulis secara setara dalam sebutan teorem 3.2 melalui pengoperasi-pengoperasi Virasoro. Bagi sebarang $\rho \in \boldsymbol{Z} + \frac{1}{2}$, boleh ditakrifkan suatu pengoperasi terbitan α_ρ, dengan

$$\alpha_\rho = \begin{cases} \dfrac{(2\rho!!)}{\sqrt{2}} \dfrac{\partial}{\partial t_{\rho+\frac{1}{2}}} & if \quad \rho > 0 \\[2ex] \dfrac{1}{(-2\rho-2)!!\sqrt{2}} \left(t_{-\rho-\frac{1}{2}} - \delta_{\rho+\frac{3}{2},0} \right) & if \quad \rho < 0 \end{cases} \qquad (3.6a)$$

Pengoperasi α_ρ memenuhi hubungan kalis tukartertib berikut,

$$\left[\alpha_{p_1}, \alpha_{p_2}\right] = \rho_1 \, \delta_{\rho_1 + \rho_2, 0} \quad . \qquad (3.6b)$$

Ini mengimplikasi bahawa pengoperasi terbitan formal

$$L_n = \begin{cases} \dfrac{1}{2} \sum\limits_{\rho} \alpha_\rho \alpha_{n-\rho}, & n \neq 0 \\[2ex] \sum\limits_{\rho > 0} \alpha_{-\rho} \alpha_\rho + \dfrac{1}{16}, & n = 0 \end{cases} \qquad (3.7a)$$

boleh melaksanakan suatu aljabar Virasoro dengan cas memusat $(c^3 - c)/12$:

$$[L_m, L_n] = (m-n) L_{m+n} + \delta_{m+n,0} \frac{m^3 - m}{12} \quad . \qquad (3.7b)$$

Menggunakan hubungan kalis tukartertib (3.7b), teorem-teorem itu dapat diuji dengan menunjukkan bahawa $L_n Z = 0$ bagi n = -1 dan n = 2; iaitu secara terangnya persamaan-persamaan ini adalah dalam bentuk berikut:

$$\frac{\partial Z}{\partial t_0} = \sum_{i=0}^{\infty} t_{i+1} \frac{\partial Z}{\partial t_i} + \frac{t_0^2}{2} Z \qquad (3.8a)$$

$$\frac{\partial Z}{\partial t_3} = \frac{1}{7!!} \left(\sum_{i=0}^{\infty} (2i+5)(2i+3)(2i+1) t_i \frac{\partial Z}{\partial t_{i+2}} + 3 \frac{\partial^2 Z}{\partial t_0 \partial t_1} \right) \qquad (3.8b)$$

Sebagai natijah identiti Kontsevich (3.1) di kalangan nombor-nombor persilangan (2.3), Kontsevich (1992) membuktikan bahawa fungsi pembahagian $Z(t_*)$, (3.5) berhubungan dengan kembangan asimptot bagi kamiran matrik Hermitean

$$\int_{K(N)} \exp\left(\frac{\sqrt{-1}}{6} tr\, X^3 \right) d\mu_\Lambda(X) \qquad (3.9)$$

dengan $\Lambda = diag\{\Lambda_1, \dots \Lambda_N\}$ matriks Hermitean tentu positif dan $d\mu_\Lambda(X)$ ialah sukatan Gaussan yang ditakrifkan oleh hasil darab

$$(X \mid Y)_\Lambda := \frac{1}{2}\left(tr\,(X\,\Lambda Y) + tr(Y\,\Lambda X)\right),$$

pada ruang $K(N)$ daripada matriks Hermitean $N\,x\,N$. Khususnya bagi sebarang $k \geq 0$,

$$t_k(\Lambda) = -(2k-1)!!\; tr\,\Lambda^{(2k-1)}.$$

Oleh itu

$$Z(t_*)\Big|_{t_*(\Lambda)} = \int_{K(N)} \exp\left(\frac{\sqrt{-1}}{6}\; tr\,X^3\right) d\mu_\Lambda(X) \quad , \qquad (3.10)$$

tatkala $|\Lambda| \longrightarrow \infty$. Apabila $N \to \infty$, $\{t_k(\Lambda)\}$ menjadi koordinat Miwa yang tidak bersandar pada ruang $K(N)/U(N)$ dan teorem-teorem tersebut secara setaranya diturunkan menjadi kenyataan berkaitan kamiran matriks Hermitean (3.10) dan matriks-matriks Hermitean, iaitu

$$L_n Z\Big|_{t_*(\Lambda)} = 0, \qquad n = -1, 2\,.$$

Menulis dalam sebutan koordinat Miwa, diperoleh

$$tr\Lambda^{-1}\frac{\partial}{\partial\Lambda} Z(t_*(\Lambda)) = -\left(\sum_{i=0}^{\infty} t_{i+1}\frac{\partial Z}{\partial t_i}\right)_{t_*(\Lambda)} \qquad (3.11a)$$

$$tr\Lambda^{5}\frac{\partial}{\partial\Lambda} Z(t_*(\Lambda)) = \left(-\sum_{i=0}^{\infty}(2i+5)(2i+3)(2i+1)t_i\frac{\partial Z}{\partial t_{i+2}} + 3\,tr\Lambda\frac{\partial Z}{\partial t_1} + tr\Lambda^3\frac{\partial Z}{\partial t_0}\right)_{t_*(\Lambda)}$$
(3.11b)

Kedua-dua persamaan terjana dengan mengambil

$$tr\Lambda^{2k+1}\frac{\partial}{\partial\Lambda} t_i(\Lambda) = -\frac{(2i+1)!!}{(2i-2k-1)!!}\; t_{i-k}(\Lambda),$$

bagi sebarang $k \geq -1$ dan sebarang $i \geq k$.

Menggabungkan bersama persamaan (3.8a, b) dan (3.11a, b), teorem-teorem tersebut menjadi setara dengan persamaan-persamaan berikut:

$$\frac{\partial Z}{\partial t_0}\Bigg|_{t_*(\Lambda)} = -tr\Lambda^{-1}\frac{\partial}{\partial\Lambda} Z(t_*(\Lambda)) + \frac{\left(tr\Lambda^{-1}\right)^2}{2} Z(t_*(\Lambda)) \qquad (3.12a)$$

$$\left(-105\frac{\partial Z}{\partial t_3} + 3\frac{\partial^2 Z}{\partial t_0\partial t_1} + 3\,tr\Lambda\frac{\partial Z}{\partial t_1} + tr\Lambda^3\frac{\partial Z}{\partial t_0}\right)_{t_*(\Lambda)} = tr\Lambda^5\frac{\partial}{\partial\Lambda} Z(t_*(\Lambda)) \qquad (3.12b)$$

Tambahan lagi Witten (1991) telah membuktikan bahawa bagi sebarang terbitan *D* dalam $\{\partial/\partial t_0, \partial/\partial t_1, \partial/\partial t_3, \dots\}$, wujud suatu polynomial P_D dalam surihan-surihan ganjil X sehinggakan

$$DZ(t_*)\Big|_{t_*(\Lambda)} = \int_{K(N)} P_D(X) \cdot \exp\left(\frac{\sqrt{-1}}{6}\, trX^3\right) d\mu_\Lambda(X),$$

dan beliau menkonjektur (dibuktikan oleh Di Francesco et al. 1993) bahawa perkara ini benar bagi sebarang pengoperasi terbitan dalam pembolehubah t_*.

Oleh itu terbitan-terbitan fungsi pembahagian $Z(t_*)$ terhadap t_* boleh diungkapkan sebagai kamiran matriks Hermitian. Akibatnya bukti bagi persamaan-persamaan (3.12a, b) dan dengan itu teorem-teorem di atas diturunkan kepada hanya mengesahkan identiti-identiti di antara kamiran matriks Hermitean. Witten (1992) melaksanakan tugas tersebut menerusi langkah-langkah bijak menggabungkan teknik-teknik gambarajah Feynman dan pengamiran bahagian demi bahagian yang berjela-jela. Manakala Fiorenza & Murri (1993) dan Fiorenza (2006) telah menjalankan tugas yang sama dengan menggunakan gambarajah-gambarajah Feynman yang sesuai dengan puncak-puncak dihiasi dengan polinomial supaya akhirnya dapat disahkan identiti-identiti tersebut dalam sebutan beberapa identiti bergraf sahaja.

Z

Kenyataan

1. Bukti Kontsevich mengenai konjektur Witten dilaksanakan dengan menkombinatorikkan nombor-nombor persilangan pada ruang moduli lengkung dan seterusnya mengungkapkan perkara ini dalam sebutan hasil tambah ke atas “graf-reben”. Konjektur Witten menandakan terdapatnya suatu kaitan mendalam di antara ruang-ruang moduli seperti dibincangkan di atas dengan sistem-sistem terkamir. Jalinan ini masih bermisteri dan penemuannya sebagai satu kejutan yang indah. (Witten dianugerahi “Pingat Fields” pada tahun 1990, manakala Kontsevich pada 1998, khususnya bagi kerja-kerja yang dinyatakan dalam kertas kerja ini)

2. Satu lagi kaitan kepada sistem terkamir ialah melalui aljabar Lie Virasoro. Dijkraaf et al. (1991) menunjukkan bahawa konjektur Witten (bersamaan dengan persamaan tetali) mengimplikasikan yang fungsi pembahagian (3.5) dihapuskan menerusi suatu turutan pengoperasi terbitan (3.7a) yang sepadan dengan sebahagian aljabar Virasoro. Persamaan terbitan pertama $L_{-1}Z = 0$ ialah persamaan tetali dan keduanya (*n* = 2) secara geometrinya jelas, walaubagaimanapun pengertian geometri bagi yang lain masih kabur.

3. Salah satu persoalan terbuka lagi asas dalam teori Gromov-Witten (G-W) mengenai persilangan bertautologi dalam ruang $\overline{M}_{g,n}(X)$, ialah berkaitan denagan suatu pengitlakan formulasi konjektur Witten di atas dan urus menggunakan lengkung-lengkung pemetaan kepada suatu manifold sasaran *X* sebarangan (ruang unjuran licin): konjektur Virasoro. Pembangunan teori G-W dimotivasikan oleh kerja-kerja Gromov (1985) mengenai ruang moduli pemetaan-pemetaan holomorfik-pseudo dalam geometri simplektik dan Witten (1991) yang mengkaji graviti bematra dua.

4. Bagi mengukuhkan kerangka kerja dan halatuju penyelidikan ini, kami merujuk kata-kata Atiyah (1994) (juga pemenang “Pingat Fields” tahun 1966) yang pernah menyarankan bahawa

   The Feynman integrals will have been given precise meanings, not by analysis, but by a mixture of combinatorial and algebraic techniques.

4 Fungsi penjana nombor-nombor persilangan pada ruang moduli bagi lengkung spin-*r* dan fungsi-tau bagi hierarki Gelfand-Dickey (G-D)

Seksyen ini secara ringkas memperihalkan konjektur Witten teritlak. Ini dilakukan dengan menghubungkan teori persilangan pada ruang moduli lengkung spin-*r*, $\overline{M}_{g,n}^{1/r,m}$, dan hierarki terkamirkan Gelfand-Dickey.

Takrif 4.1. Sistem persamaan terbitan separa yang tidak terhingga diberikan oleh

$$i\frac{\partial L}{\partial t_n^m} = \frac{k_{n,m}}{\sqrt{r}}\left[\left(L^{n+m+1/r}\right)_+, L\right] \tag{4.1}$$

dengan $k_{n,m}$ adalah pemalar-pemalar

$$k_{n,m} = \frac{(-1)^n \, r^{n+1}}{(m+1)(r+m+1)\ldots(nr+m+1)},$$

dengan $r-1$ fungsi-fungsi yang tidak diketahui, $u_i\left(x, t_n^m\right),\ i = 0, \ldots, r-2,\ m = 0, \ldots, r-1,\ n \geq 0$ yang digelar hierarki Gelfand-Dickey ke-r.

Takrif 4.2. Suatu siri kuasa formal $\psi(\mathbf{t})$, dalam pembolehubah $t_n^m,\ m = 0, \ldots, r-2,\ n \geq 0,$ dinamai suatu potensi bagi hierarki G-D, jika siri itu memenuhi syarat-syarat berikut:
1. $\psi(\mathbf{0}) = 0$,
2. fungsi-fungsi

$$v_m(\mathbf{t}) = \frac{\partial^2 \psi(\mathbf{t})}{\partial t_0^0 \partial t_0^m}$$

memenuhi persamaan (4.1) dengan $x = t_0^0$.
3. $\psi(\mathbf{t})$ memenuhi persamaan tetali

$$\frac{\partial \psi(\mathbf{t})}{\partial t_0^0} = \frac{1}{2}\sum_{m,n=0}^{r-2} \eta_{mn}\, t_0^m t_0^n + \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{r-2} \frac{\partial \psi(\mathbf{t})}{\partial t_k^m} \tag{4.2}$$

dengan $\eta_{mn} = \delta_{m+n,r-2}$.

Konjektur Witten Teritlak. (Jarvis et al. 2006)

Wujud suatu kelas (kohomologi) sebenar spin-r $c^{1/r}$ pada $\overline{M}_{g,n}^{1/r,m}$ yang memenuhi aksiom-aksiom tertentu (lihat Aksiom 1-5 dalam Takrif 4.1, Jarvis et al. 2006), sehinggakan ruang besar potensi $\phi(\mathbf{t})$ bagi teori medan berkohomologikal spin-r tertentu berlaku serentak dengan fungsi potensi $\psi(\mathbf{t})$ bagi hierarki G-D.

Z

Kenyataan

1. Aksiom-aksiom (Aksiom 1-5, Jarvis et al. 2006) telah diperkenalkan sehinggakan suatu kelas kohomologi $c^{1/r}$ pada ruang $\overline{M}_{g,n}^{1/r,m}$ itu dipenuhi, supaya diperoleh suatu teori medan berkohomologi pangkat (r – 1) dalam pengertian Kontsevich & Manin (1994).
2. Konjektur ini boleh dilihat sebagai satu penghalusan kepada formulasi asal konjektur Witten (1993), oleh sebab binaan beliau ini belum jelas dapat menghasilkan suatu kelas dengan sifat-sifat pemfaktoran yang dikehendaki.
3. Terdapat bukti tambahan bagi konjektur tersebut dalam genus 1 dan sebarang r. Witten (1993) menyatakan yang rumus bagi nombor-nombor persilangan apabila g = 1 boleh diperoleh daripada

konjektur itu bagi kesemua $r \geq 2$. Tambahan lagi, bila $r \leq 4$, persamaan bagi potensi $\phi_1(\mathbf{t})$ bagi ruang fasa yang besar masih sah bagi sebahagian potensi hierarki G-D yang bergenus-1.

Sepertimana dalam teorem 3.2, fungsi eksponen bagi fungsi potensi KdV, iaitu fungsi-τ, boleh ditakrif sebagai fungsi unik $Z(\mathbf{t})$ yang dihapuskan oleh pengoperasi terbitan tertentu L_i , $i \geq -1$, menjanakan (sebahagian) aljabar Lie Virasoro. Ini seharusnya memberikan suatu formulasi alternatif kepada konjektur Witten yang asal. Secara serupa, fungsi eksponen $Z(\mathbf{t})$ bagi potensi G-D dihapuskan oleh satu siri pengoperasi terbitan yang membentuk apa yang dinamai sebagai aljabar-W_r^+ (lihat Adler & van Moerbeke 1992, Krichever 1994) (sebahagiannya membentuk satu subaljabar berisomorfi kepada (separuhnya) aljabar Virosoro). Oleh itu diperoleh formulasi yang berselang-seli berikut bagi konjektur Witten teritlak.

Konjektur (Konjektur aljabar-*W*)

Wujud satu pungutan pengoperasi terbitan yang membentuk suatu aljabar-W_r^+ (dalam mana penjana-penjana $\{L_n\}_{n \geq -1}$ bagi aljabar Virasoro membentuk suatu subset) yang menghapuskan dan menentukan dengan lengkap $Z(\mathbf{t})$. □

Konjektur ini boleh dianggap sebagai analog G-D bagi satu penghalusan konjektur Virasoro (lihat Eguchi et al. 1994). Apabila $r = 2$, konjektur ini terturun kepada keadaan biasa pemberat tertinggi Virasoro..

5 Kesimpulan

Daripada perbincangan di atas, adalah jelas bahawa kerangka kerja yang dicadangkan berupaya untuk memberikan sumbangan bermakna dalam rantau matematik fizik moden dan fizik teori dan tambahan lagi dijangka mempunyai dampak yang mendalam dengan implikasi yang berpanjangan. Walaubagaimanapun pada aras perbatasan penyelidikan fundamental masakini, adalah tidak tepat untuk menyatakan bahawa kerangka kerja ini telah berjaya memperoleh kefahaman lebih baik mengenai pengertian, kepentingan dan faedah kamiran Feynman itu. Secara terangnya, kami berpendapat bahawa laluan masakini masih tidak bersistem, khususnya untuk memahami realisasi matematik secara rapi akan teori kamiran Feynman dan penggunaannya melalui konsep-konsep istimewa yang terjana daripada pengelasan sistem-sistem yang berkepentingan fizikal. Perkara ini jelasnya lagi rumit untuk dimaktubkan jalinan kedua-duanya dalam rantau hipotetikal teori tetali atau seterusnya teori Matriks/M. Walaubagaimanapun, menerusi pendekatan teori hebat Gromov-Witten, adalah dijangkakan yang teori persilangan bagi $\overline{M}_{g,n}(X)$ akan sekali lagi diterajui oleh model matriks dan hierarki terkamirkan yang berkaitan.

Kelihatan semacam terdapat konsensus di kalangan ahli fizik teoritis dan matematik fizik bahawa penawar sebenar kepada masalah-masalah di atas adalah dengan mengkaji semula secara lebih bermakna konsep 'ruang-masa', kedua-duanya daripada perspektif geometri mahupun secara fizikal (sebagai contoh, mungkin dilaksanakan suatu perluasan yang sesuai atau pengubahsuaian terhadap 'geometri tidak kalis tukar tertib' Connes (1994), atau cadangan yang lebih radikal ialah diabaikan langsung konsep 'ruang-masa', Manin (1983)). Walaubagaimanapun kami (Zainal 2004b, 2006) mengambil pandangan berlandaskan cadangan yang dipelopori oleh Atiyah (1994), yang banyak bersandar dan berlatarbelakang kepada konjektur-konjektur Witten dan model Kontsevich. Kami percaya secara jangka panjang, pendekatan ini akan membuahkan suatu konsep alternatif lebih baik bagi kamiran lintasan Feynman : entiti matematik yang ditakrif rapi dengan keperkasaan aspek pengiraannya.

Penghargaan

Penyelidikan ini dibiayai sebahagiannya oleh Geran Penyelidikan Fundamental Kementerian Pengajian Tinggi Malaysia, No. Vot. 78082. Kami berterima kasih kepada Universiti Teknologi Malaysia (UTM), kerana memberikan kami pelepasan untuk membentang kertas kerja ini di Seminar Pemikiran Fizik Semasa, ASASI, UKM, Bangi pada 18 April 2009.

Rujukan

Adler, M. dan P. van Moerbeke, P. 1992. A matrix integral solution to two-dimensional W_p-gravity, *Commun.Math. Phys.* **147** , 25–56.

Atiyah, M. 1994. Responses to "Theoretical Mathematics toward a cultural synthesis of Mathematics and Theoretical Physics", by A. Jaffe and F. Quinn, *Bull. Amer. Math. Soc*. **30** (2) (1994), 1-2.

Bullough, R. dan Caudrey, P.J.C. 1995. Solitons and the Korteweg-de Vries equation: Integrable Systems in 1834-1995. *Acta Applicandae Mathematicae*. **39**: 193-228.

Connes, A. 1994. *Noncommutative Geometry*. New York: Academic Press

Date, E., Jimbo, M., Kashiwara, M. dan Miwa, T. 1983. Transformation groups for soliton equations, dalam Jimbo, M. dan Miwa, T. (pyt.), *Proc.RIMS Symposium on Nonlinear Integrable Systems – Classical and Quantum Theory*, Singapore: World Scientific; 39-119.

D. Fiorenza, and R. Murri, 2003. Matrix integrals and Feynman diagrams in the Kontsevich model, *Adv. Theor. Math. Phys.,* **7**, 527-578.

Di Francesco, P,, Itzykson, C, dan Zuber, J.B. 1993. Polynomial averages in the Kontsevich model, **151**, 193-219.

Dickey, L.A. 1991. *Soliton Equations and Hamiltonian Systems*, Advanced Series in Mathematical Physics, **12**, World Scientific, Singapore.

Dickey, L.A. 1994. Why the general Zakharov-Shabat equations form a hierarchy, *Commun. Math. Phys*., **163**, 509-521.

Dijkgraaf, R. H. Verlinde, H. and E. Verlinde, E. 1991. Topological strings in $d < 1$, *Nucl. Phys.* **B352**, 59-86.

Drinfeld, V.G. 1987. Quantum Groups, dalam Gleason, A.M. (pyt), *Proc. Internat. Congress Math.*, Berkeley. Providence: Amer. Math Soc.. Vol. **1**: 798 – 820

Dubrovin, B. 1996. Geometry of 2D Topological Field Theories, dalam Francaviglia, M. dan Greco, S. (pyt), *Integrable systems and quantum groups*, Lect. Notes in Maths. **1620**, Berlin : Springer-Verlag, 120 - 348

Eguchi, T. dan Xiong, C.S. 1998. Quantum cohomology of higher genus: Topological recursion relations and Virasaro conditions. *Adv. Theor. Math. Phys*. **2**: 219 – 229

Faddeev, L.D. 1990. On the relation between mathematics and physics, dalam *Integrable Systems*, Nankai Lect. in Math. Phys., Singapore: World Scientific; 3-9.

Feher, L., Stipsicz, A. dan Szenthe, J. 1992. (pyt.) *Topological quantum field theory and geometry of loop spaces*. Singapore: World Scientific.

Fermi, E., Pasta, J. dan Ulam, S. 1955. Studies of nonlinear problems I, dalam *Los Alamos Rep. LA 1940*, diterbitkan semula dalam *Collected Works of Fermi, E.* Chicago: Univ. Chicago Press; Vol. II: 978-988.

Feynman, R.P. 1948. Space-time approach to non-relativistic quantum mechanics. *Rev. Modern Phys.***20**: 367-387.

Fiorenza, D. 2006. Feynman diagrams and the KdV hierarchy, :arXiv:math.AG/0111097 v2.

Gardner, C.S., Greene, J.M., Kruskal, M.D. dan Muira, R.M. 1974. The Korteweg- de Vries equation and generalizations VI, Methods for exact solution. *Commun. Pure Appl. Math*. **27**: 97 – 133

Gromov, M. 1985. Pseudoholomorphic curves in symplectic manifolds, *Invent. Math.* **82** , 307-347.

Jefferies, B. 2004 Advances and Applications of the Feynman Integral. 1-58. (*Draf*)

Jarvis, T.J., Kimura, T. dan Vaintrob, A. 2006. Moduli spaces of higher spin curves and integrable hierarchies.: arXiv: math.AG/9905034 v4.

Johnson, G.W. dan Lapidus, M.L. 2000. *The Feynman Integral and Feynman's Operational Calculus.* Oxford: Oxford Univ. Press.

Jones, V.F.R 1991 Von Neumann algebras in mathematics and physics, dalam Satake, I. (pyt), *Proc. Internat. Congress Math.,* Kyoto. Tokyo: Springer-Verlag Vol 1: 121- 138

Kleinert, H. 1990. *Path integrals in quantum mechanics, statistics and polymer physics.* Singapore: World Scientific.

Kolotkosov, V.N. 2001. Mathematics of Feynman path integral. Talk presented at the IMC "FILOMAT 2001", Nis, August 26-30, 2001, FILOMAT 2001.

Kontsevich. M. 1992. Integration theory on the moduli space of curves and the matrix Airy functions. *Commun. Math. Phys* **147**: 1 – 23

Kontsevich, M. and Yu I. Manin, 1994. Gromov-Witten classes, quantum cohomology and enumerative geometry, *Commun. Math. Phys*. **164**, 525–562.

Korteweg, D.J. dan de Vries, G. 1895. On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal and on a new type of long stationary waves. *Philos. Mag.* **39**: 422-443.

Krichever, I.M. 1994. The τ-function of the universal Whitham hierarchy, matrix models and topological field theories, *Comm. Pure Appl. Math*. **47**, no.4, 437–475.

Kruskal, M. dan Zabusky, N.J. 1965. Interaction of solitons in a collisionless plasma and the recurrence of initial states. *Phys. Rev. Lett.* **15**: 240-243.

Lax, P.D. 1968. Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves. *Commun. Pure Appl. Math.* **21** : 441-456.

Mirzakhani, M. 2007. Weil-Petersson volumes and intersection theory on the moduli space of curves *Journal of the American Mathematical Society*, **20** ,1–23.

Manin, Y. I. 1983. *Mathematics and Physics*, Boston: Birkhauser

Okounkov, A. dan Pandhariponde, R. 2003. Gromov – Witten Theory, Hurwitz numbers and Matrix models I*, preprint* . (math. AG/ 0101147)

Palais, R.S. 1997. The symmetries of solitons. *Bull. Amer. Math. Soc.* **34**: 339-403.

Polchinski, J. 1998. *String Theory* , Jilid 1 dan 2. Cambridge: Camb. Univ. Press.

Polyakov, A.M. 1987. *Gauge Fields and Strings.* Newark: Hardwood Academic.

Roepstorff, G. 1994. *Path Integral approach to Quantum Physics*. Berlin: Springer-Verlag.

Rota, G.-C.1997. *Indiscrete Thoughts.* Boston: Birkhauser.

Salam, A. 1988. Reminiscences on path integrals in field theories. *Asia-Pacific Physics News,* **3**: 15-16.

Scott-Russell, J. 1844. Report on waves, dalam *Rep. 14th Meeting of the British Assoc. for the Advancement of Science*, London: John Murray.

Shaharir, M.Z. 1986. New framework for the Feynman Integral. *Int. Jour. Theor. Phys.* **10**: 1075-1094.

Witten, E. 1987. Physics and geometry, dalam Gleason, A.M. (pyt), *Proc. Internat. Congress Math.*, Berkeley. Providence: Amer. Math Soc.. Vol. 1: 267 – 303.

Witten, E. 1991. Two dimensional gravity and intersection theory on moduli space, dalam *Surveys in Differential Geometry*, Bethlehem: Lehigh Univ. ; 243 – 310

Witten, E. 1992. On the Kontsevich model and other models of two-dimensional gravity. In *Proceedings of the XXth International Conference on DifferentialGeometric Methods in Theoretical Physics, Vol. 1, 2 (New York, 1991),* 176-216, River Edge, NJ, 1992. World Sci. Publishing.

Witten, E. 1993. Algebraic geometry associated with matrix models of two dimensional gravity, dalam *Topological Methods in Modern Mathematics* , Houston: Publish or Perish ; 235 – 269

Zainal, A.A. 2001. Functional integral solution of the complex diffusion equation with complex quadratic potential in a classical space. *Bull. Malaysian Math. Sc. Soc.(Second Series)* **24**: 111-128.

Zainal, A.A. 2004a. Kamiran Feynman dan Sistem Terkamir Lengkap. in Ummul Khair Salma Din et al. (pyt.), *Prosiding Seminar Mengenang Prof. Dr. Shaharir Mohamad Zain*, 3 June 2004, Bangi: FST, UKM and PERSAMA; 30-54.

Zainal, A.A 2004b. A glimpse of the relationship between Feynman Integral and Integrable Systems, *Matematika,* **20**, 125-132.

Zainal A.A. 2006. Feynman Integral and Integrable Systems: Theory and Applications. In Ismunandar *et al* (pyt.). *Proceedings of the International Conference on Mathematics and the Natural Sciences* , 28-29 Nov. 2006, ITB, Bandung: 5-12.