Matematik Formal Sepintas Lalu[1]

Muhammad Ikhwan Azlan
ikhwane02a@yahoo.co.uk

1 Pengenalan

Apakah yang dimaksudkan dengan *matematik formal*? Secara ringkas, matematik formal ialah pengungkapan pernyataan matematik dengan menggunakan ungkapan yang terdapat dalam teori set dan didasari oleh logik boole. Walaupun secara amalinya, matematik yang ada sekarang ini pun tidaklah semuanya diungkapkan secara formal, tetapi ini adalah atas kepercayaan bahawa pemformalan ini boleh dilakukan sekiranya perlu (misalnya jika berlaku perselisihan atas pembuktian satu teorem yang *subtle* dan rumit). Malah, pemformalan selalunya dianggap tidak perlu memandangkan selalunya ayat biasa berupaya memberi intuisi yang lebih jelas berbanding ayat yang terlalu formal. Walaupun begitu, "jelas" di sini selalunya bermaksud "jelas sesama matematikawan" sedangkan mungkin tidaklah begitu jelas bagi mereka yang tidak biasa dengan cara matematikawan menjelaskan sesuatu perkara. Akhirnya matematik formal inilah yang dianggap sebagai matematik dalam bentuknya yang paling murni, seperti yang dianuti oleh fahaman logikisme dan formalisme.

2 Logik dan Kebenaran

Dalam pembentangan lepas yang bertajuk "Matematik dan Pencarian Kebenaran", saudara Taufik telah berterus-terang menyatakan bahawa beliau dengan sengaja tidak menyentuh dengan mendalam makna "kebenaran" itu sendiri. Namun, akhirnya kita sendiri mendapati bahawa perbincangan yang bermakna tidak dapat dilanjutkan sekiranya kita tidak sekurang-kurangnya menjelaskan sifat kebenaran yang dibicarakan itu.

Kita bersetuju untuk memaknakan "kebenaran" sebagai apa yang dimaknakan dengan perkataan *haqq*. Prof Syed Naquib al-Attas selalu mengingatkan kita bahawa *haqq* bukan sahaja bermakna *benar* dalam maksud benar/palsu suatu pernyataan, tetapi juga *real* atau benar-benar wujud, atau setidak-tidaknya mempunyai hubungan yang jelas dengan entiti yang diketahui benar kewujudannya. Dengan kata lain, *kebenaran* bukanlah suatu yang hanya bersifat *logikal*, tetapi juga *ontologikal*.

Bagi saya, ini sahaja sudah cukup untuk menjelaskan sedikit-sabanyak kebenaran yang bagaimana yang mahu dan mampu dicapai oleh logik. Logik hanya menjamin kebenaran suatu kesimpulan selagi premisnya diketahui benar, dan undang-undang logik dipatuhi. Matematik tulen menurut Bertrand Russel, seperti yang diingatkan oleh saudara Taufik tempoh hari, adalah satu set pernyataan "jika...maka..."[2].

[1] Makalah ini dibincangkan di pertemuan mingguan ahli muda ASASI di Restoran Yus, BB Bangi pada hari Jumaat 10 Februari 2012.

[2] Bertrand Russell, *Mathematics and the Metaphysicians* dalam James Newman (Ed.), *The World of Mathematics (Vol. 3).*

> *"Pure mathematics consists entirely of assertions to the effect that, if such and such a proposition is true of anything, then such and such another proposition is true of that thing."*

Jika kita menerima hal ini, maka ternyata logik sahaja tidak mampu membawa kepada kebenaran, walaupun kebenaran yang bersifat benar/palsu tadi. Ia masih perlu kepada premis-premis yang benar, yang kebenarannya tidak dapat ditentukan oleh logik. Oleh sebab kebenaran premis itu tidak dapat ditentukan oleh logik, maka satu-satunya unsur kebenaran yang boleh ditacapkan juga pada logik ialah pada kesahihan hujahnya. Dalam bahasa yang formal, logik tidak dapat menghakimi sama ada pernyataan a itu benar, atau sama ada pernyataan b itu benar, tetapi hanya dapat menghakimi sama ada pernyataan $a \to b$ itu benar.

Matematik pula menjadi pernyataan-pernyataan dalam bentuk $a \to b$ dengan a dan b itu mewakili pernyataan-pernyataan dalam teori set yang telah dinyatakan aksiom-aksiomnya oleh Zarmelo dan lain-lain seperti Fraenkel dan Von Neumann. Maka "pembuktian" dalam matematik berakhir secara muktamad apabila pernyataan yang ingin dibuktikan itu adalah natijah daripada pernyataan-pernyataan yang asalnya terbitan dari teori set.

Misalnya, perbincangan pembuktian Teorem Euler dalam teori graf[3] dalam *Proofs and Refutations* oleh Imre Lakatos[4]. Dalam perbincangan itu, perkelahian mengenai pembuktian teorem ini berlarutan sehinggalah polihedron yang akhirnya dipanggil sebagai polihendron Euler ini dapat dibina daripada struktur ruang vektor dengan pembinaan yang sebenarnya adalah pembinaan struktur *symplicial complex* dalam topologi aljabar.

3 Daripada *Material Axiomatic* kepada *Formal Axiomatic*

Buat sementara ini kita terima pembahagian cara berfikir kepada tiga jenis seperti yang umumnya dikemukakan dalam pengajian asas logik iaitu pemikiran induktif (*istiqra'*), deduktif (*istidlal*) dan abduktif. Kesimpulan yang terbit daripada pemikiran induktif dan abduktiflah yang menjadi premis atau aksiom bagi mengisi penghujahan deduktif.

Aksiom yang diambil secara terus daripada kesimpulan induktif atau abduktif daripada pemerhatian terhadap fenomena fizikal ini yang dinamakan sebagai *material axiomatic*[5] ini. Kita gunakan contoh yang dikemukakan oleh saudara Taufik tempoh hari, iaitu kenyataan bahawa hasil tambah dua integer genap adalah genap. Buat masa ini lupakan dahulu pembuktian Taufik itu. Bayangkan 3000 tahun dahulu, pengalaman manusia dengan integer positif hanyalah sebagai bilangan benda-benda. Kemungkinan besar konsep genap dan ganjil ini pun hanya difahami dalam makna "bilangan yang boleh dibahagi dua sama rata" dan "bilangan yang tidak boleh dibahagi dua sama rata". Kemudian, mereka perhatikan setiap kali dua bilangan genap dicampurkan hasilnya juga boleh dibahagi dua sama rata, genap juga. Maka berdasarkan pemerhatian ini, mereka buat satu kesimpulan secara induktif bahawa bilangan genap ditambah bilangan genap akan menghasilkan bilangan genap. Jika hukum ini dijadikan aksiom, mereka boleh terbitkan hukum-hukum lain secara deduktif, misalnya, *jika satu bilangan ditambah dengan satu bilangan yang tidak diketahui dan hasilnya adalah bilangan ganjil, maka bilangan yang tidak diketahui tadi itu mestilah bukan genap*, atau *hasil darab nombor genap dengan sebarang nombor lain adalah juga genap.* Inilah yang dinamakan *material axiomatic* itu.

Dalam pembuktian yang dikemukakan oleh Taufik itu ada disebutkan aksiom agihan, iaitu

$$a(b + c) = ab + ac$$

untuk sebarang integer a, b dan c. Ini satu lagi contoh *material axiom* apabila hukum ini diperoleh dengan memerhatikan sifat integer apabila dioperasikan sedemikian rupa "$a(b + c)$" sentiasa memberikan nilai seperti yang dikemukakan dalam aksiom itu "$ab + ac$".

[3] $V - E + F = 2$ dengan V mewakili bilangan bucu, E mewakili bilangan sisi, manakala F mewakili bilangan permukaan, untuk sebarang polihedron Euler.

[4] Sila minta saya demonstrasikan teorem ini.

[5] Cadangan terjemahan: Aksiom/Keaksioman jasmani/material/kejasmanian/jasmaniah??

Formal axiomatic pula ialah sistem aksiom yang *dicipta* tanpa perlu adanya keserasian dengan fenomena fizikal[6]. Misalnya, mentakrifkan fungsi ϕ sebagai satu fungsi nombor nyata yang mempunyai sifat $\phi(a+b) = \phi(a) + \phi(b)$ untuk sebarang nombor nyata a dan b.

Bagaimanakah aksiom material bertukar menjadi aksiom formal? Aksiom material $a(b+c) = ab + ac$ menjadi satu aksiom formal apabila ia tidak lagi dihadkan kepada integer positif, tetapi dibebaskan interpretasinya asalkan saja hukum itu dipatuhi. Untuk membebaskannya lagi, operasinya tidak lagi dihadkan kepada operasi darab dan tambah, tetapi sebarang operasi dedua yang lain. Misalnya

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$$

untuk sebarang pernyataan logik a, b dan c. Dengan kata lain,

$$a \cdot (b \star c) = (a \cdot b) \star (a \cdot c)$$

untuk sebarang operasi dedua $\cdot$ dan $\star$ dan a, b dan c adalah unsur set tertentu.[7]

Proses peralihan daripada *material* kepada *formal axiomatic* ini boleh dikatakan bermula semenjak zaman Euclid dan memuncak dengan *Grundlagen der Geometrie* Hilbert. Proses ini dimotivasikan oleh persoalan-persoalan yang timbul daripada postulat[8] kelima Euclid, yang terkenal dengan nama postulat selari[9]. Perasaan syak dan ragu terhadap postulat ini terbit apabila kita mula menumpukan perhatian pada *pernyataan (statements, propositions)*. Apabila ini berlaku, ramai ilmuan cuba membuktikan postulat ini daripada postulat-postulat Euclid yang lainnya, atau mencari/mencipta postulat lain yang lebih jelas dapat diterima kebenarannya dan membuktikan postulat kelima ini sebagai satu teorem yang terbit daripada postulat baru tadi. Namun usaha ini tidak berjaya dilakukan selama beratus-ratus tahun oleh begitu ramai ilmuan termasuk Nasiruddin at-Tusi yang mengemukakan pembuktian yang pada suatu ketika agak meyakinkan dengan menggunakan kaedah *reductio* namun akhirnya ditemui kesilapannya. Akhirnya Gauss, Bolyai dan Lobatchevski mula mengandaikan postulat ini sebenarnya satu postulat yang merdeka daripada postulat-postulat lain. Maka apa akan berlaku sekiranya postulat ini dibuang? Ajaibnya, mereka dapati geometri masih lagi konsisten tanpa postulat ini, cuma geometrinya kini pelik-pelik, iaitu apa yang dinamakan sebagai geometri bukan Euclidan (*non-Euclidean geometry*).

Apabila ini berlaku, mereka mula membebaskan fikiran mereka daripada terpengaruh oleh intuisi daripada cerapan alam fizikal yang telah menjadi kebiasaan kehidupan, tetapi menumpukan perhatian lebih pada pernyataan-pernyataan dan hukum logiknya. Apabila satu set pernyataan baru diterbitkan mengenai sifat-sifat unsur yang digunapakai berdasarkan set aksiom/postulat tertentu, barulah *interpretasinya* dibayangkan, dan diunjurkan kembali dalam konteks alam fizikal. Oleh sebab apa yang mereka faham sebagai *titik*, *garis* dan sebagainya itu sudah tidak lagi semestinya seperti apa yang biasanya kita bayangkan sebagai titik dan garis, mereka mula untuk memformalkan unsur-unsur ini pula, seperti yang cuba dilakuka oleh Liebniz, dan kemudiannya Peano dan Frege.

Dalam proses mentakrifkan sesuatu itu secara formal, kita memerlukan apa yang dinamakan oleh Euclid sebagai *unsur* atau *element*[10]. Bayangkan, sekiranya kita ingin mentakrifkan suatu perkataan, kita tidak dapat tidak mesti guna perkataan-perkataan lain dalam pentakrifan itu. Perkataan-perkataan lain ini pula perlu juga kepada pentakrifan, dan perlu perkataan-perkataan lain lagi. Akhirnya kita perlukan perkataan yang difahami tanpa perlu apa-apa takrif[11] Dalam ayat biasa, mungkin perkataan-perkataan ini muncul menerusi pengalaman bersama/sepunya manusia dengan fenomena fizikal ini. Tapi dalam matematik yang sedang cuba diformalkan

[6] Walaupun hakikatnya masih boleh ditelusuri akhirnya sumbernya dari pengalaman fizikal juga.

[7] Perkara yang hampir sama pernah saya bincangkan dalam pembentangan makalah bertajuk *Matematik Tulen Berhalatuju* di Seminar Intelek Muda ASASI 2009.

[8] Pada asasnya tiada bezanya antara aksiom dan postulat.

[9] *Parallel postulate.*

[10] Aristotle juga menggunakan perkataan ini dengan makna yang hampir sama dalam *Analytica Posterioria.*

[11] Yang difahami mungkin secara intuisi, yang difahami secara fitrah. Terkenang ayat *...al-asma'a kullaha....*

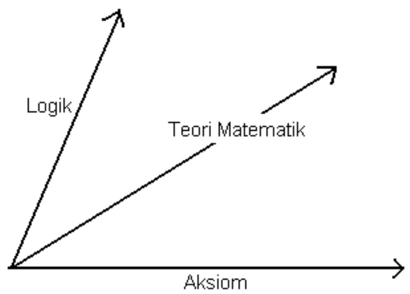
ini, *unsur-unsur* ini perlu diletakkan *konteks*nya, supaya walaupun *apa dia* unsur itu tidak mungkin diketahui (malah mungkin tiada *apa dia* baginya) namun apa unsur ini *buat* dalam sistem aksiom yang akan dibina itu jelas. Mungkin boleh dikatakan, *apa unsur itu buat* itulah *apa dia* bagi unsur itu.

Sebagai contoh, dalam *Grundlagen der Geometrie*, satu usaha Hilbert untuk mengungkapkan semula postulat-postulat Euclid dalam bentuk yang lebih moden dan formal (walaupun beliau lebih banyak menggunakan ayat biasa daripada simbol abstrak seperti yang dilakukan oleh Peano misalnya, Hilbert menyenaraikan 21 postulat yang dibahagikan kepada beberapa kumpulan. Dalam kumpulan pertama misalnya,

> *Group I: Postulates of Connection*
>
> 1. *There is one and only one line passing through any two given distinct points.*
> 2. *Every line contains at least two distinct points, and for any given line there is at least one point not on the line.*[12]

Usaha Hilbert ini menjadi titik tolak kepada pemformalan sepenuhnya geometri Euklid, kerana ramai matematikawan yang kini meyakini usaha pemformalan ini mampu dilakukan. Apabila pemformalan ini berlaku, lama-kelamaan perhatian ditumpukan pada *struktur* dan bukan lagi pada interpretasi[13] dan saya jangka dalam fikiran kebanyakan mereka, struktur inilah yang lebih *real*. Maka berjalanlah usaha memformalkan matematik keseluruhannya sehingga, struktur nombor juga perlu dibina daripada suatu set aksiom.

Apabila semuanya dilihat sebagai struktur, hanya menanti masa untuk seseorang menyedari bahawa logik yang selama ini menjadi landasan undang-undang yang menerbitkan pernyataan baru daripada pernyataan sedia ada ini juga mempunyai *struktur*nya. Lebih menakjubkan, strukturnya tidak jauh beza dengan struktur nombor yang telah diformalkan tadi. Apabila logik sendiri menjadi struktur, maka timbul persoalan, "bolehkah kita ubah suai stuktur ini?" atau "Apakah yang menghalang kita dari mengubahsuai struktur ini?". Maka dapatlah disimpulkan secara kasar bahawa matematik moden tidak lebih hanyalah suatu yang bergantung kepada *struktur logik apa dan set aksiom mana yang dipakai.*



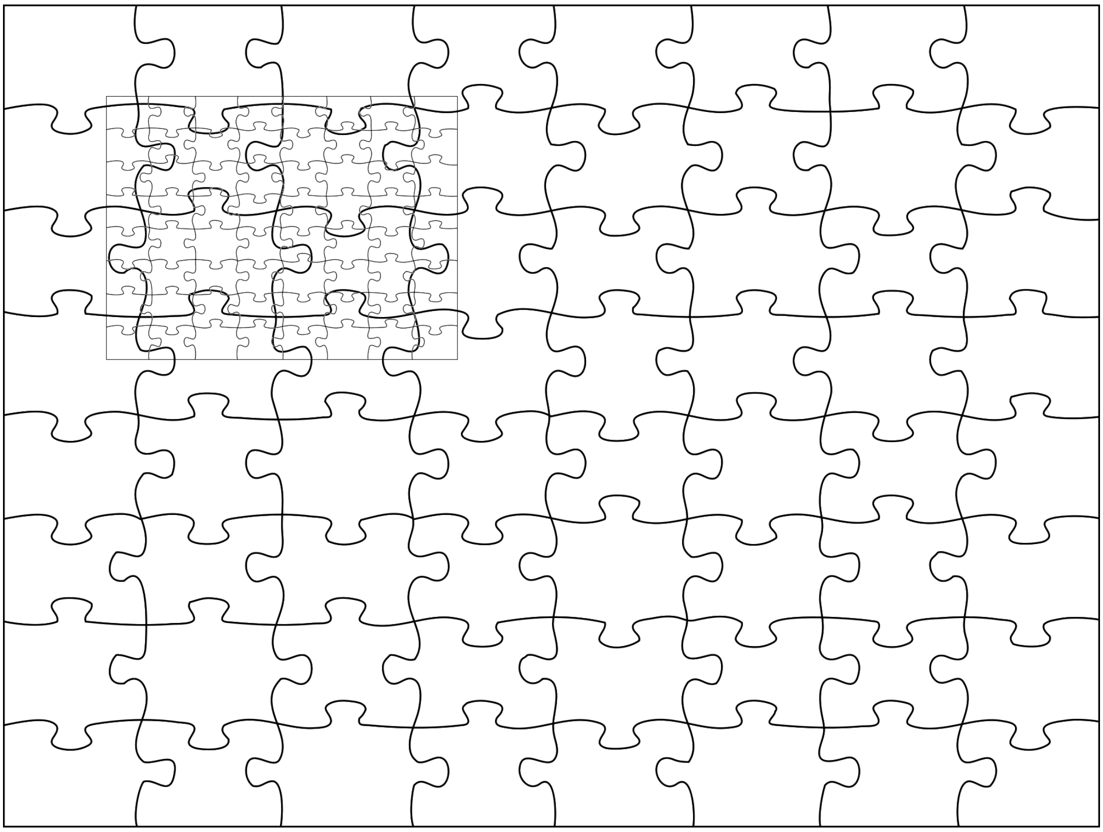
Bagaimanakah kita merekacipta struktur logik yang baru, bagaimanakah kita hendak menghasilkan satu set aksiom yang baru agar teori matematik yang terbit daripada keduanya *boleh tahan*?[14] Walaupun saya belum menekuni teori kategori dan teori topos dengan bersungguh-sungguh, melainkan gambaran umum daripada bacaan umum dan agak-agakan sahaja, saya jangka inilah antara motivasi teori-teori ini. Bagaimana hendak *mengira/calculate* supaya jawapan yang terhasil bukannya satu nilai tertentu, tetapi satu logik tertentu dan set aksiom tertentu yang boleh menerbitkan struktur yang dikehendaki.

[12] Diambil dari buku Howard Eves, yang diambil dan diubahsuai sedikit dari *Grundlagen der Geometrie* edisi kesepuluh pada tahun 1968 yang telah diedit semula oleh Paul Bernays.

[13] Penggunaan perkataan *interpretasi* ini sendiri menjelaskan hal ini

[14] Saya kehabisan ekspresi. Tak pasti lagi bagaimana lagi nak mengungkap apa yang saya maksudkan di sini.

4 Teori Kategori dan Dekonstruktivisme



Satu lagi medan yang belum saya teroka dengan bersungguh-sungguh, falsafah dekonstruktivisme Derrida. Seingat saya dalam satu perbualan dengan saudara Iqbal, beliau pernah menyatakan kepada saya yang mengitu bacaannya, dekonstruktivisme Derrida bukanlah bermaksud pecah-pecahkan sahaja semuanya dan biarkannya begitu. Tetapi, pecah bahagian yang kita mahu kepada komponen yang lebih halus supaya dapat dikonstruk semula dengan lebih *fine-tuned*. Lebih kurang begitulah interpretasi saya terhadap perbualan itu. Jika ini benar, maka saya mula dapat melihat punca-punca falsafah pancamoden yang ada akarnya daripada matematik. Sekarang teringat pula buku *Postmodern Mathematics*[15] yang diperkenalkan oleh saudara Taufik satu ketika dulu. Berikut garapan saya secara umum:

Bayangkan satu *jigsaw puzzle* yang besar dan terpecah-pecah. Berpandukan gambar keseluruhan, kita susun setiap keping pada kedudukan yang sepatutnya. Katakan untuk mengalihkan kepingan-kepingan besar itu terlalu susah, jadi kita pecahkan beberapa keping yang terdaya itu menjadi *jigsaw* yang lebih kecil, dan begitulah seterusnya. Semakin kecil kepingan itu, semakin ia menjadi asing daripada gambar keseluruhan tadi, dan semakin sukar pula hendak ditentukan kedudukannya. Semakin kecil kepingan, semakin tinggi peluang untuk meletakkan kepingan pada tempat yang salah tetapi gambar keseluruhannya tidak banyak berubah di tempat itu.

[15] Lebih kurang begitu tajuknya

5 Pembacaan dan Perbincangan Lanjut

Rujukan

[1] Howard Eves, *Foundations and Fundamental Concepts of Mathematics*, 1990 Boston (3rd Ed).

[2] Imre Lakatos, *Proofs and Refutations*, 1976 Cambridge.

[3] _______________, *Mathematics, Science and Epistemology*, 1978 Cambridge.

[4] James Newman (Ed.), *The World of Mathematics (Vol. 3)*, 1956 New York.

[5] Morris Kline, *Mathematics and the Physical World*, 1959 New York.